

大正13

大正 13 年入学試験問題（数学）解答例

(1)

与えられた三角形の 3 頂点を A,B,C とする。 $AB = a, BC = 2a, CA = b, \angle B = \theta (0 < \theta < \pi)$ と定めると、三角形 ABC について余弦定理より

$$\cos \theta = \frac{a^2 + (2a)^2 - b^2}{(2a)^2} = \frac{5a^2 - b^2}{4a^2}$$

$$\therefore b^2 = 5a^2 - 4a^2 \cos \theta$$

$$b = a\sqrt{5 - 4\cos \theta} \geq a \quad (\because b > 0)$$

したがって、三角形 ABC の長さが最小の辺は、辺 AB である。また、三角形 ABC の周の長さは、 $l = a + 2a + a\sqrt{5 - 4\cos \theta} = a(3 + \sqrt{5 - 4\cos \theta})$ となる。以上より、最短の辺と三角形 ABC の周の長さの比は

$$\frac{a}{l} = \frac{1}{3 + \sqrt{5 - 4\cos \theta}}$$

となる。 $-1 < \cos \theta < 1$ より、 $4 < 3 + \sqrt{5 - 4\cos \theta} < 6$ だから、 $\frac{1}{6} < \frac{1}{3 + \sqrt{5 - 4\cos \theta}} < \frac{1}{4}$ となる。ゆえに、

$$\frac{1}{6} < \frac{a}{l} < \frac{1}{4}$$

よって、示された。

(2)

$$\log_{2.718} 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 2.718} = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 2718 \cdot 10^{-3}} = \frac{0.3010}{3.4343 - 3} = 0.6931$$

(3)

与えられた等式より、

$$n - a^2 = -x^2, \quad n - b^2 = -y^2, \quad c^2 = n + (x + y)^2$$

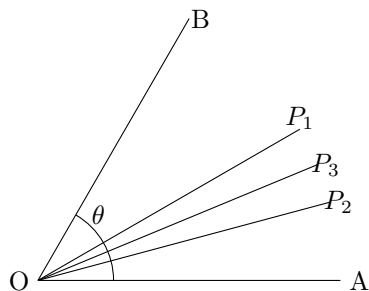
だから、

$$\begin{aligned} (n - a^2 - b^2 + c^2)^2 &= \{(n - a^2) + (n - b^2) + (x + y)^2\}^2 \\ &= \{-x^2 - y^2 + (x + y)^2\}^2 = 4x^2y^2 \\ 4(n - a^2)(n - b^2) &= 4(-x^2)(-y^2) = 4x^2y^2 \end{aligned}$$

$$\therefore (n - a^2 - b^2 + c^2)^2 = 4(n - a^2)(n - b^2)$$

以上より、示された。

(4)



$\angle AOB = \theta$ とおく。また、 $\angle AOP_1 = a_1$ とし、 $n \geq 2$ について、 $\angle P_{n-1}OP_n = a_n$ と定義すれば、数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式、

$$a_1 = \frac{\theta}{2}, \quad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} (n \geq 2)$$

が成り立つ。したがって、数列 $\{a_n\}$ は初項 $\frac{\theta}{2}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列より、

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \theta$$

ところで、

$$\angle P_nOA = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}a_n$$

であるから、

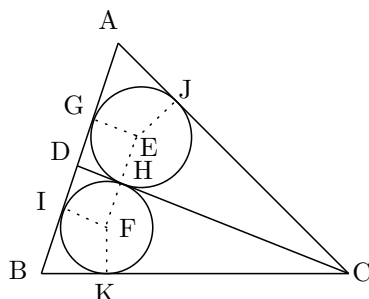
$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}a_n &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}a_k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \theta \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \theta \end{aligned}$$

ここで、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \angle P_nOA = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \theta = \frac{1}{3} \theta$$

したがって、 $n \rightarrow \infty$ のとき、二等分線は限りなく $\angle AOB$ の三等分線の一つに近づく。

(5)

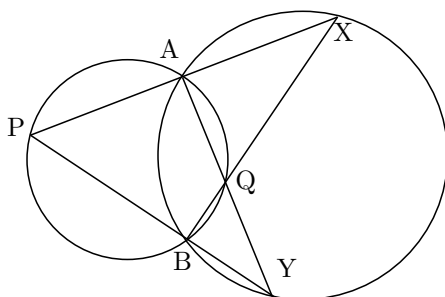


それぞれ中心がE、Fである三角形ACD、BCDの内接円が線分CD上の同一点Hで接するとき、点E、Fから線分AB上に垂線を引き、その交点をそれぞれ点G、Iとする。また、点E、Fからそれぞれ線分AC、BC上に垂線を引き、その交点を各々点J、Kとする。上図より、 $AG = AJ$, $CJ = CH = CK$, $BK = BI$, $DI = DH = DG$ だから、

$$\begin{aligned} AC - BC &= AJ + JC - BK - KC = AJ - BK \\ AD - BD &= AG + GD - BI - ID = AG - BI \end{aligned}$$

以上より、 $AC - BC = AD - BD$ を得る。したがって、点Dは辺ABを、 $AC - BC = AD - BD$ となるように内分する点である。

(6)



三角形APYと線分XBに関して、メネラウスの定理より、

$$\frac{BP}{YB} \cdot \frac{XA}{PX} \cdot \frac{QY}{AQ} = 1 \quad (1)$$

また、4点A、B、X、Yが同一円周上にあり、それぞれ3点A、Q、YおよびB、Q、Xが同一直線上にあるから、 $\angle QAX = \angle QBY$, $\angle QXA = \angle QYB$ であり、これから、 $\triangle QAX \sim \triangle QBY$ となる。したがって、

$$QA : QB = XA : YB \quad (2)$$

式(1)、(2)より、

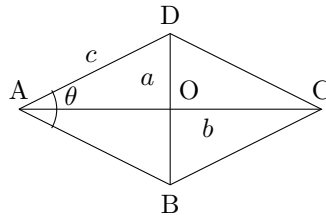
$$\begin{aligned}\frac{QY}{PX} \cdot \frac{BP}{BQ} &= 1 \\ \frac{QY}{PX} &= \frac{BQ}{BP} \\ \therefore QY : PX &= BQ : BP\end{aligned}$$

以上のことと、 $\angle QYB = \angle QXA = \angle PXB$ であることを踏まえれば、 $\triangle QYB \sim \triangle PXB$ である。ゆえに、

$$\angle BQY = \angle BPX$$

$\angle BQY = \angle AQX$ であるから、 $\angle AQX = \angle BPX$ となる。したがって、4点 A,B,P,Q は同一円周上にある。すなわち、Q は定円上にある。

(7)



ひし形 ABCD の 2 つの対角線のうち、短い方の対角線の長さを a 、長い方の対角線の長さを b とする。また、2 つの対角線の交点を点 O とする。三角形 AOD、AOB、COB、COD は合同な三角形であるから、 $DO = \frac{a}{2}$, $AO = \frac{b}{2}$ であり、三角形 AOD の面積を S 、ひし形 ABCD の面積を T とすれば、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{8}ab \\ \therefore T &= 4S = \frac{1}{2}ab\end{aligned}$$

ここで、ひし形 ABCD の一辺の長さを c とすると、三角形 AOD について三平方の定理より、

$$\begin{aligned}c^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ c &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - 2ab} \quad (\because l = a + b) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - 4T}\end{aligned}$$

したがって、

$$T = \frac{1}{4}l^2 - c^2$$

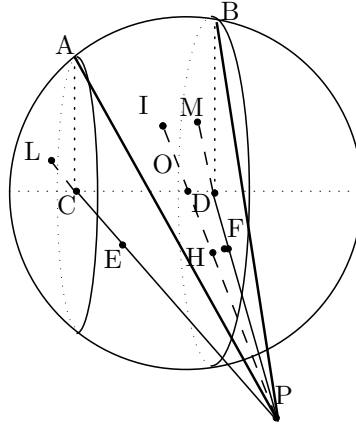
ところで、 $\angle DAB = \theta$ ($0 < \theta < 180^\circ$) とおけば、 $\angle ADC = 180^\circ - \theta$ であり、 $\angle DAO = \frac{\theta}{2}$, $\angle ADO = \frac{180^\circ - \theta}{2}$ となる。さらに、 $\angle AOD = 90^\circ$ だから、三角形 AOD の辺 AO および DO に関して、 $DO = c \cdot \cos \frac{180^\circ - \theta}{2}$, $AO = c \cdot \cos \frac{\theta}{2}$ となり、

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= c \cdot \cos \frac{180^\circ - \theta}{2} + c \cdot \cos \frac{\theta}{2} \\ &= c \left\{ 2 \cos 45^\circ \cos \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right) \right\} \\ c &= \frac{l}{2\sqrt{2} \cos \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right)} \end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4}l^2 - \frac{l^2}{8 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right)} = \frac{l^2 \{ 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right) - 1 \}}{8 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \frac{l^2 \cos (90^\circ - \theta)}{8 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \frac{l^2 \sin \theta}{8 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right)} \end{aligned}$$

(8)



2 平面の交線上の任意の点 P から半径 r の球面の 2 つの切り口に接する接線を引き、その接点をそれぞれ点 A、B とする。点 A を含む切り口の円の中心 C と球の中心 O との距離を s 、点 B を含む切り口の円の中心 D と球の中心 O との距離を t とすれば、 $AC = \sqrt{r^2 - s^2}$, $BD = \sqrt{r^2 - t^2}$ である。また、点 P と球の中心 O を結ぶ直線と球の交点のうち、P に近い方を H、遠い方を I とし、直線 PC、PD と球の交点のうち P に近い方をそれぞれ E、F、遠い方をそれぞれ L、M とし、さらに $PH = a$, $HO = r$, $PE = x$, $PF = y$ とおく。 $CE = CL = \sqrt{r^2 - s^2}$, $DF = DM = \sqrt{r^2 - t^2}$ であるから、方べきの定理より、

$$\begin{aligned} PE \cdot PL &= PH \cdot PI \\ PH \cdot PI &= PF \cdot PM \\ \therefore x(x + 2\sqrt{r^2 - s^2}) &= y(y + \sqrt{r^2 - t^2}) = a(a + 2r) \end{aligned}$$

を得る。

ここで、

$$\begin{aligned} PA^2 &= PC^2 - AC^2 = (x + \sqrt{r^2 - s^2})^2 - (\sqrt{r^2 - s^2})^2 = x(x + 2\sqrt{r^2 - s^2}) = a(a + 2r) \\ PB^2 &= PD^2 - BD^2 = (y + \sqrt{r^2 - t^2})^2 - (\sqrt{r^2 - t^2})^2 = y(y + 2\sqrt{r^2 - t^2}) = a(a + 2r) \end{aligned}$$

したがって、 $PA = PB$ が成り立つ。これより、示された。

大正14

大正 14 年入学試験問題（数学）解答例

(1)

$$1.4135 \leq a < 1.4145, \quad 1.7315 \leq b < 1.7325$$

だから、

$$3.145 \leq a + b < 3.147$$

よって、結果は小数第 2 位まで信用することができる。

(2)

$$f(x) = px^2 + qx + r \quad (\text{ただし、} p, q, r \text{ は有理数、} p \neq 0)$$

と $f(x)$ を定義すると、

$$f(0) = r = \frac{1}{c}$$

$$f(1) = p + q + r = \frac{1}{c+1}$$

$$f(2) = 4p + 2q + r = \frac{1}{c+2}$$

だから、この 3 式を解いて、

$$p = \frac{1}{c(c+1)(c+2)}, \quad q = -\frac{c+3}{c(c+1)(c+2)}, \quad r = \frac{1}{c}$$

よって、

$$f(x) = \frac{1}{c(c+1)(c+2)}x^2 - \frac{c+3}{c(c+1)(c+2)}x + \frac{1}{c}$$

したがって、

$$f(c+2) = \frac{c+2}{c(c+1)} - \frac{c+3}{c(c+1)} + \frac{1}{c} = \frac{1}{c+1}$$

(3)

円を半径の小さい方から順に、 $C_1, C_2, \dots$ と定め、円 C_n の半径を r_n 、中心を O_n とする。全ての円は直線 OX, OY に接するから、全ての円の中心は一直線上にあり、その直線上に点 O が存在する。よって、 $\angle XOO_{n+1} = \theta$ と定め、点 O_{n+1} から直線 OX 上に点 H_{n+1} をとって垂線 $O_{n+1}H_{n+1}$ を引き、点 O_n から直線 $O_{n+1}H_{n+1}$ 上に点 I_{n+1} をとって垂線 O_nI_{n+1} を引けば、 $\angle O_{n+1}O_nI_{n+1} = \theta$ だから、

$$\begin{aligned}(r_{n+1} + r_n) \sin \theta &= r_{n+1} - r_n \\ r_{n+1} &= r_n \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}\end{aligned}$$

よって、数列 $\{r_n\}$ は初項 r_1 、公比 $\frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta}$ の等比数列より、

$$r_n = r_1 \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right)^{n-1}$$

であり、数列 $\{r_n\}$ の初項から第 n 項までの部分和を S_n とすると、

$$\begin{aligned}S_n &= r_1 \frac{1 - \left(\frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} \right)^n}{1 - \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta}} = r_1 \frac{\{(1 + \sin \theta)^n - (1 - \sin \theta)^n\}}{2 \sin \theta (1 - \sin \theta)^{n-1}} \\ &= \frac{r_1}{2 \sin \theta (1 - \sin \theta)^{n-1}} \cdot \{(1 + \sin \theta) - (1 - \sin \theta)\} \sum_{k=1}^n (1 + \sin \theta)^{n-k} (1 - \sin \theta)^{k-1} \\ &= r_1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right)^{n-k}\end{aligned}$$

となる。

(4)

与えられた等式より、

$$x^4 = a^4 - b^4$$

この等式は 3 辺の長さが a^2, b^2, x^2 で、斜辺が a^2 の直角三角形を表している。

まず、 a^2, b^2 の長さの線分を作図する。ある円の直径の端点に点 A をとり、その直径となる線分と垂直でその交点 H をもち、交点 H から、円との交点までの長さが a の点を P とする。ただし、 $AH=1$ となるように H をとる。直径の端点のうち、点 A でない方を点 B 、半直線 PH と円の交点のうち、点 P と異なる点を Q とすると、方べきの定理より、

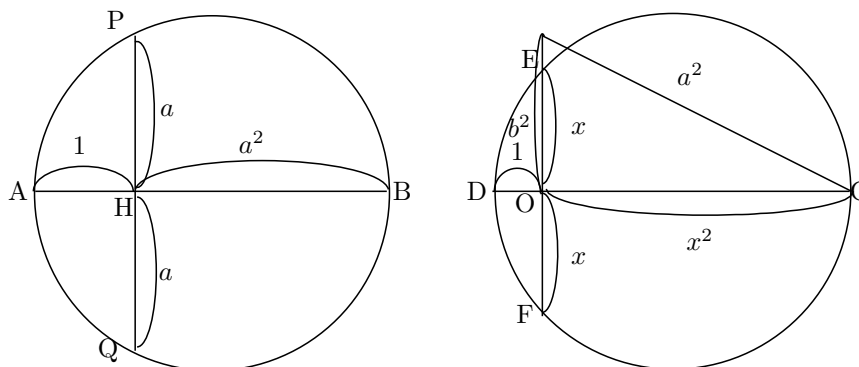
$$AH \cdot HB = PH \cdot HQ$$

$HQ = PH = a$ だから、 $HB = a^2$ を得る。同様にして、 b^2 の線分も作図できる。

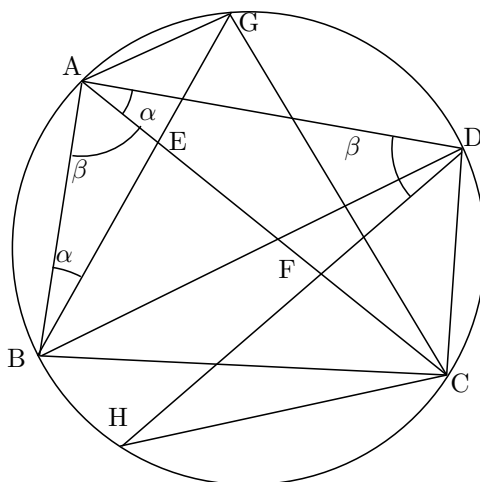
次に、先ほど作図した 2 つの線分から x^2 を作図する。そして、この線分の端点を点 O, C とする。半直線 CO 上に、 $OD = 1$ かつ線分 CO 上にない点 D をとる。また、点 O から、線分 CD に垂直な直線 MN を描き、線分 CD を直径とする円と直線 MN の交点を E, F とする。このとき、 $EO = OF$ であり、方べきの定理から

$$CO \cdot OD = EO \cdot OF$$

が成り立つから、 $EO = OF = x$ となる。以上より、長さ x の線分が作図により求められた。

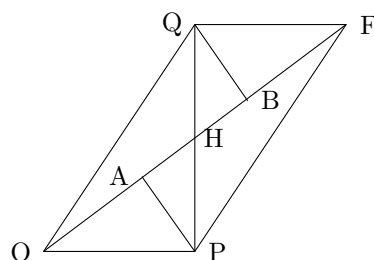


(5)



$\angle ABE = \angle CAD = \alpha$, $\angle BAC = \angle ADF = \beta$ とする。また、半直線 BE と円の交点を G、半直線 DF と円の交点を H とする。 $\angle BDH = \gamma$ とすると、上の図より、 $\angle DBC = \angle DHC = \angle ACG = \alpha$, $\angle BDC = \beta$, $\angle BCD = \pi - \alpha - \beta$, $\angle ADB = \beta - \gamma$, $\angle GBD = \angle GAD = \pi - 2\alpha - 2\beta + \gamma$, $\angle ACB = \beta - \gamma$, $\angle AGB = \beta - \gamma$ だから、 $\triangle ACG \equiv \triangle CAD$ である。したがって、 $AG = CD$ である。これより、 $\triangle AGE \equiv \triangle CDF$ だから、 $AE = CF$ となる。 $AF = AE + EF$, $CE = CF + EF$ から、以上のことより、 $AF = CE$ が成り立つ。

(6)



力 P, Q に関して、始点 O を基準とするベクトル $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ 、またその合力 $\overrightarrow{OF}$ を考える。4 点 O, P, Q, F を結んでできる平行四辺形 $OPFQ$ に関して、2 組の対角線の交点はそれらの対角線の中点だから、この中点を点 H とし、さらに、線分 OF 上に各点 P, Q から引いた垂線の足をそれぞれ点 A, B とすれば、三角形 HPA と三角形 HQB は合同である。よって、 $PA = QB$ が成り立つから、

$$Q \sin(\alpha - \beta) = P \sin \beta$$

この等式を同値変形すると、

$$Q \sin \alpha \cos \beta - Q \cos \alpha \sin \beta = P \sin \beta$$

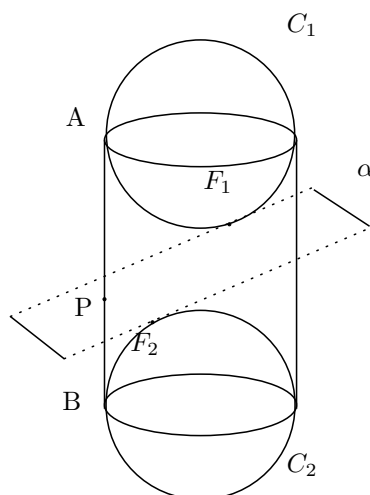
$$Q \sin \alpha = P \tan \beta + Q \cos \alpha \tan \beta$$

$$Q \frac{1}{\tan \beta} = P \frac{1}{\sin \alpha} + Q \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\cot \beta = \frac{P}{Q} \operatorname{Cosec} \alpha + \cot \alpha$$

を得る。

(7)



直円柱の側面に点 A, B で内接する 2 つの球 C_1, C_2 を考える。ただし直線 AB は直円柱の底面と垂直だとする。直円柱をそれと垂直でない平面 α で切断するとき、球 C_1, C_2 と平面 α の接点をそれぞれ F_1, F_2 とすると、直円柱の切り口上の任意の点 P について、

$$PA = PF_1, \quad PB = PF_2$$

が成り立つ。点 A, B は定点であるから、線分 PA, PB の長さは一定であり、

$$PF_1 + PF_2 = PA + PB = AB = (\text{一定})$$

したがって、直円柱の平面 α による切り口は楕円である。ゆえに、円ではない。